

# *Repères* **IREM**

**numéro 115**

*Avril 2019*

*revue*

*des* **Instituts**  
*de* **Recherche**  
*sur l'* **Enseignement**  
*des* **Mathématiques**

*publiée sous le patronage de  
l'Assemblée des Directeurs d'IREM*

**TOPIQUES éditions**

---

## SOMMAIRE

---

Editorial	3
<b><i>Une année à bord d’AstroDuclaux, projet interdisciplinaire et fédérateur</i></b>	5
Hugues ALMARIC, Emmanuelle BOYER, Sophie BRIAT, Stéphanie BIGNON, Anne NÉLY, Édouard SALVY, Irem de Clermont Ferrand	
<b><i>Expliquer, justifier, prouver, démontrer ?</i></b>	35
Émilie BARON, Christophe HACHE, Irem de Paris 7	
<b><i>Un cours « Littérature et mathématiques »</i></b>	53
Spangle DURAC, Claude MERKER, Stefan NEUWIRTH, Irem de Besançon	
<b><i>Rubrique Multimedia</i></b>	65
<b><i>Rubrique Clé en Main</i></b>	
<b><i>Mission cryptographie</i></b>	71
Matthieu GIRAUD, Pascal LAFOURCADE, Irem de Clermont-Ferrand	
<b><i>Rubrique Parutions</i></b>	77
<b><i>Rubrique Vie des IREM</i></b>	81
<b><i>Appel à contribution :</i></b> Les laboratoires de mathématiques dans les lycées Consignes aux auteurs	
<b><i>Rubrique Agenda</i></b>	83
Abonnements, réabonnements	84
Liste des Irem	85
Sommaire du prochain numéro	86

---

## EDITORIAL

---

Ce numéro de *Repères-IREM* commence par nous envoyer dans l'espace avec « *Une année à bord d'AstroDuclaux, projet interdisciplinaire et fédérateur* ». Cet article est un témoignage détaillé d'un vaste programme pluridisciplinaire d'une classe de seconde du lycée Emile Duclaux d'Aurillac dont le thème est l'astronomie. Ont participé au projet Hugues Amalric en physique-chimie, Emmanuelle Boyer en mathématiques, Sophie Briat en documentation, Stéphanie Bignon en histoire-géographie, Anne Nély en sciences de la vie et de la Terre, Édouard Salvy en français. Depuis déjà cinq ans, ces professeurs s'investissent sur un thème qui change chaque année. Leurs travaux sont détaillés sur le site de l'Irem de Clermont-Ferrand :

<http://www.irem.univ-bpclermont.fr/Astronomie-Aurillac> .

L'article décrit le déroulement de l'année 2017-2018 et l'étude de Titan, un satellite de Saturne. Les disciplines sont alors mises à l'épreuve avec l'étude de nouvelles littéraires sur Titan en lettres, de l'histoire de sa découverte en Histoire, de l'habitabilité de ce satellite en Physique-Chimie et SVT. En mathématiques, les élèves se sont inspirés d'une très belle illustration de Huygens datant de 1659 montrant l'aspect des anneaux de Saturne au cours de la révolution de la planète autour du soleil. Ils ont ainsi modé-

lisé ceux-ci et leur trajectoire à l'aide du logiciel géogebra 3d.

Le second article « *expliquer, justifier, prouver, démontrer* » écrit par Emile Baron et Christophe Hache commence également par une certaine forme d'interdisciplinarité. En effet, qu'attendons-nous des élèves lorsqu'on leur demande de justifier dans des disciplines aussi variées que la Technologie, l'Éducation Musicale, le Français, les SVT ou l'Histoire-Géographie ? Les auteurs s'intéressent ensuite plus précisément aux mathématiques avec l'étude de manuels, puis ils exposent des entretiens avec des professeurs de collège pour lesquels la diversité d'interprétation des mots *expliquer-justifier-prouver* est redoutable. L'article se termine par l'étude de productions d'élèves par rapport à ces trois termes. Vu le manque de consensus des professeurs, on imagine bien la variété d'interprétation de la part de leurs élèves ! Qu'en conclure ? Face à ces difficultés, les auteurs préconisent une meilleure concertation et davantage d'explications de la part des enseignants afin qu'ils accordent leurs exigences. Mais, vu la diversité d'interprétation, cela est certainement un vœu pieux !

Le dernier article « un cours Littératures et Mathématiques » rend compte d'une expé-

---

EDITORIAL

---

rience très originale proposée par Spangle Durac, Claude Merker, et Stefan Neuwirth. En réponse à une demande ministérielle de proposer des unités transversales dans les maquettes de diplôme à l'Université de Franche-Comté, les auteurs ont imaginé un cours permettant de développer à la fois un discours sur les mathématiques et sur la littérature. Les textes sont extrêmement variés. En voici un exemple tiré du septième livre des *Éléments* d'Euclide : « 1. Est unité ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une. 2. Et un nombre est la multitude com-

posée d'unités ». Suit alors une discussion sur le rapport complexe des mathématiques avec la langue naturelle. D'autres textes suivent : un poème de Mallarmé et les rimes en « ix », un autre est extrait du « *Traité de la Roulette* » de Pascal, ...

En conclusion, ce numéro de *Repères-IREM* nous montre que les mathématiques permettent un voyage dans le temps, dans l'espace et dans les autres disciplines. Il vous donnera certainement l'idée de belles activités mathématiques.

Bonne lecture.

Emmanuel Claisse

---

## MISSION CRYPTOGRAPHIE

---

Matthieu GIRAUD

(Doctorant, LIMOS, Université Clermont Auvergne)

Pascal LAFOURCADE

(Maître de conférence, LIMOS, Université Clermont Auvergne)

Groupe Informatique Sans Ordinateur

Irem de Clermont-Ferrand<sup>1</sup>

### Contexte

Depuis les révélations d'Edward Snowden en juin 2013, le grand public a pris conscience que la sécurité informatique est une discipline à part entière et qu'elle concerne tout le monde. Faire découvrir la sécurité informatique et la cryptographie est clairement une activité qui intéresse beaucoup d'élèves. Cette activité est conçue pour que de jeunes élèves découvrent par eux-mêmes des mécanismes cryptographiques aussi bien historiques que modernes. Cela peut paraître ambitieux mais les différentes expériences en classe ont montré qu'en s'amusant en groupe et en autonomie les élèves sont capables de comprendre et de résoudre de nombreux

défis. L'activité appelée « *Mission Cryptographie* » consiste pour les élèves en groupe de six à décrypter dix lettres laissées par un agent secret.

### Objectifs de l'activité

La *cryptographie* remonte à l'Antiquité. C'est une discipline qui appartient aujourd'hui aussi bien aux mathématiques qu'à l'informatique. L'objectif de cette activité est de présenter sous forme ludique des primitives cryptographiques historiques et des notions en sécurité informatique aux jeunes élèves. Pour cela les notions de cryptanalyse, de chiffrement par substitution, de chiffrement par transposition ainsi que de partage de secret sont abordées.

---

<sup>1</sup> Pascal Lafourcade membre du groupe.

## Choix didactiques et pédagogiques

Pour ne pas dévoiler tous les secrets de chaque lettre, nous présentons uniquement les concepts théoriques associés aux différentes activités faites dans cette mission cryptographie. Ces choix ont été faits pour permettre aux élèves de comprendre par eux-mêmes le fonctionnement des différents chiffrements historiques proposés.

### — Chiffrement par substitution.

La technique, appelée chiffrement par substitution, consiste à changer l'alphabet pour chiffrer un message. Elle était déjà utilisée du temps des romains sous le nom de « chiffrement de César » [1]. Pour chiffrer un message, il faut décaler de trois lettres dans l'alphabet chaque lettre du message à transmettre. Pour décoder un message chiffré, il suffit de décaler chacune des lettres de trois positions dans le sens inverse de l'alphabet.

Nous présentons un exemple d'un message chiffré par cette méthode : **YHQL YLGL YLFL**. En appliquant la méthode exposée ci-dessus pour déchiffrer ce message, nous retrouvons la célèbre phrase que prononça Jules César après sa victoire sur Pharnace roi du Bosphore à Zéla : « *VENI VIDI VICI* ».

### — Chiffrement de Vigenère.

Le chiffrement de Vigenère [1] (XVI<sup>ème</sup> siècle) est un autre chiffrement par substitution. Il s'agit d'une forme plus évoluée du chiffrement de César : des chiffrements par substitutions sont appliqués dans un certain ordre. Cet ordre correspond à un mot ou une phrase connue de l'expéditeur et du récepteur du message. Cette information partagée constitue une *clef* qui permet d'effectuer dans le bon ordre les différents chiffrements par substitution. Ainsi, la

même clef permet à la fois de chiffrer et de déchiffrer un message. Notons que, dans une langue donnée, une étude de fréquence d'apparition des lettres de l'alphabet dans un texte fournit une aide précieuse pour « casser » les chiffrements par substitutions. Possédant un texte d'une longueur suffisante, il est alors possible de deviner les lettres les plus utilisées, et ainsi de commencer à déchiffrer le message.

### — Chiffrement par transposition.

Une des premières techniques cryptographiques est le chiffrement par transposition. Pour chiffrer un message, l'ordre des lettres du message original est permuté. Pour le déchiffrer, il suffit d'appliquer la méthode inverse. Un des premiers exemples connus d'un tel chiffrement est la *scytale* spartiate [1], utilisée au V<sup>ème</sup> siècle avant J-C par les grecs. La scytale consiste en un bâton, autour duquel est enroulée une lanière de cuir. L'expéditeur écrit son message sur la lanière, puis une fois terminé la déroule et l'envoie. Le récepteur enroule à son tour la lanière reçue sur un bâton de même diamètre, ce qui lui permet ainsi de retrouver le texte original.

### — Partage de secret.

L'objectif de cette technique inventée par Adi Shamir en 1979 [2] est de permettre à  $k$  participants parmi  $n$  d'accéder à un secret seulement si au moins  $k$  participants sont d'accord. L'idée est de cacher le nombre secret dans le terme constant d'un polynôme de degré  $k - 1$ . Ensuite il suffit de distribuer  $n$  points d'un polynôme de degré  $k - 1$  aux  $n$  participants. Ainsi, il faut qu'au moins  $k$  participants collaborent pour retrouver le polynôme en résolvant un système de  $k$  équations à  $k$  inconnus ou en utilisant la méthode d'interpolation de Lagrange. Une fois le polynôme trouvé, nous avons trouvé le terme constant. Dans la mission, un poly-

nôme de degré un et un autre polynôme de degré deux sont utilisés.

— *Deviner des mots de passe.*

Lors de fuite de certaines bases de données de mots de passe comme ROCK YOU, des milliers de mots de passe ont fui car ils étaient stockés en clair. D'autres bases de données de mots de passe qui stockaient les mots de passe hachés ont fui comme la base de données Adobe. Rappelons qu'une fonction de hachage cryptographique  $h$ , prenant en entrée une chaîne binaire arbitrairement longue et ayant pour sortie une chaîne binaire de longueur fixée, a les propriétés suivantes :

- **Résistance à la première pré-image** : il n'est pas possible de retrouver  $x$  à partir de  $h(x)$ .
- **Résistance à la seconde pré-image** : il n'est pas possible de trouver  $x'$  différent de  $x$  à partir de  $h(x)$  et tel que  $h(x) = h(x')$ .
- **Résistance aux collisions** : il n'est pas possible de trouver  $x$  et  $x'$  différents tel que  $h(x) = h(x')$ .

Normalement il n'est pas possible de retrouver les mots de passe à partir des hachés

sauf en les testant tous, ce qui prendrait beaucoup de temps. Toutefois, en analysant la base de données Adobe, il a été remarqué que la base de mots de passe contenait les logins, les mots de passe hachés mais aussi un champ « indice » qui permet aux propriétaires des mots de passe de les aider à retrouver les mots de passe en cas d'oubli [3].

Ainsi plusieurs hachés ayant la même valeur correspondent au même mot de passe. Avec les différents indices laissés par les utilisateurs, il est possible de deviner le mot de passe et d'en avoir la certitude en appliquant la fonction de hachage correspondante. Par exemple, avec les indices « super héros » et « araignée », il est possible de deviner que le mot de passe est « Spiderman ».

#### Matériel et support(s)-élève

L'activité est constituée de dix lettres que les élèves doivent réussir à décoder. Elle est accessible en ligne à l'adresse :

<http://sancy.univ-bpclermont.fr/~lafourcade/MissionCrypto/Lettre0/>

avec le login *Mission* et le mot de passe *Crypto*.

#### Présentation de l'activité

La première lettre est la suivante :

Le 11 octobre 2018 à Aubière.

À qui de droit,

Si vous lisez cette lettre, c'est que mes ennemis m'auront retrouvé et que j'ai dû fuir. Rassurez-vous, j'ai laissé des indications et le code pour ouvrir mon coffre plein de trésors se révélera à ceux qui seront assez persévérants. Cela ne

---

 CLE EN MAIN
 

---

sera pas simple, j'ai utilisé tous mes codes secrets afin d'égarer les curieux et mes ennemis.

Bonne chance !

Agent0111

*Post-Scriptum 1* : Décryptez-moi ces jeux bien plus vite que SHERLOCK et WATSON pour finir et gagner !

*Post-Scriptum 2* : Pour la version en ligne, le mot de passe de la lettre 1 est égal à mon login. Pour la lettre 2, utilisez le nom d'une personne célèbre en majuscules obtenu dans la lettre 1.

Partant de cette première lettre les élèves vont découvrir lettre après lettre différents aspects de la cryptographie et de la sécurité informatique. Pour donner un aperçu des lettres, la prochaine lettre est chiffrée comme suit :

Oh 11 rfwreuh 2018 d Dxelhuh

D txl gh gurlw,

Mh yrlv txh yrxc dyhc frpsulv oh irqfwrqqhphqw gx frgh gh Fhvdu, txl frqvlvwh d ghfdohu fkdtxh ohwwuh gh wurlv srvlwlrqv yhuv od gurlwh gdqv o doskdehw.

Uhwhqhc fh suhplhu srlqw vhfuhw g devflvvh prlqv flqt hw g rugrqqhh prlqv yljw wurlv.

Djhqw0111

*Srvw-Vfulswxp 1* : Ghfubswhc prl fhv mhxa elhq soxv ylwh txh VKHUORFN hw ZDWVRQ srxu ilqlu hw jdqhu !

*Srvw-Vfulswxp 2* : Uhwurxyhc ohv wurlv prwv gh sdvvh d sduwlu gx ilfklhu gh prwv gh sdvvh (ohwwuh ghxa).



Il n'est donc pas possible de la lire sans avoir compris la méthode de chiffrement utilisée. Afin que les élèves arrivent à déchiffrer, cette lettre a la même structure que la première. Cette simple observation permet aux élèves d'avoir certaines parties du texte en clair et leurs chiffrés correspondant. Cela leur permet ainsi de découvrir la méthode de chiffrement utilisée qui dans le cas présent date du temps des romains.

Après cette initiation à la cryptanalyse, les défis s'enchaînent lettre après lettre pour, *in fine*, découvrir dans la lettre dix l'identité de l'Agent 0111, l'auteur fictif des dix lettres. Toutes les lettres ne sont pas chiffrées, certaines nécessitent de faire des calculs pour résoudre des systèmes d'équations, ou de calculer des fonctions de hachage simples pour déduire des mots de passe ou encore de manipuler des chaînes de caractères pour reconstituer un texte.

Dans la version en ligne, toutes les lettres sont aussi protégées par un login et mot de passe pour éviter qu'elles ne soient obtenues dans le mauvais ordre. Dans l'expérimentation faite avec les classes les lettres étaient distribuées dans le bon ordre par l'animateur de la séance.

### Grandes lignes d'un scénario possible

Le scénario choisi dans la mission cryptographie est de commencer par un chiffrement par substitution pour la première lettre puis de faire deviner trois mots de passe et logins grâce aux indices laissés par les utilisateurs et l'utilisation d'une fonction de hachage. Grâce à ces trois mots de passe, les élèves peuvent accéder aux trois lettres suivantes dans lesquelles le chiffrement de Vigenère est présenté. Les élèves récupèrent les coordonnées de deux points d'une droite lors des premières lettres. À l'aide de ces points, ils sont capables de calculer l'équation de la droite correspondante

passant par ces deux points. L'ordonnée à l'origine sera utilisée pour déchiffrer une prochaine lettre. Dans la suite, les élèves utilisent la logique, la cryptanalyse d'un chiffrement par transposition et d'un chiffrement par substitution pour obtenir les coordonnées des trois points d'un polynôme de degré deux. Pour arriver à la dernière lettre, les élèves devront résoudre un système de trois équations à trois inconnues afin d'obtenir la valeur du coefficient constant de ce polynôme.

Ces différents chiffrements ont été choisis pour permettre aux élèves de manipuler les objets mathématiques du programme du lycée mais aussi pour les initier à la cryptanalyse.

### Éléments d'analyse a posteriori

Cette activité est le résultat de plusieurs années de pratique auprès des jeunes élèves pour expliquer les concepts cryptographiques. Nous avons eu des élèves du stage mathC2+, une promotion de première année de l'IUT informatique de Clermont-Ferrand et des élèves de 6ème. À chaque fois nous avons adapté et conçu de nouvelles activités. Cette version de l'activité a été testée lors de trois séances de 1 h 30 avec des élèves de 1ère S et de BTS durant la fête de la science 2018 à l'Université Clermont Auvergne. Les élèves étaient regroupés en groupe de six. Il est important de mettre les élèves par groupe de six car certaines tâches nécessitent d'être parallélisées afin de tenir dans les 1 h 30. Le fait d'être en groupe favorise aussi les échanges et les idées pour résoudre les défis.

Dans les deux classes de 1ère un groupe a réussi à chaque fois l'ensemble des missions. Dans le groupe de BTS aucun groupe n'a su obtenir le code permettant d'accéder à la dernière lettre dans le temps imparti. Les élèves de BTS ont même dit vouloir continuer durant

la pause déjeuner pour trouver le secret de la dernière lettre.

L'ensemble des élèves et professeurs accompagnant, qui eux aussi formaient un groupe de deux ou quatre personnes, ont pris beaucoup de plaisir pendant cette activité.

L'aspect challenge est clairement un des atouts de cette activité. Il fait presque oublier aux élèves qu'ils travaillent et font des mathématiques.

En conclusion cette activité permet de faire découvrir des techniques qui ont été réellement utilisées au cours de l'histoire. Elle fait appel au sens de déduction, à l'observation et à la collaboration entre les membres de l'équipe. Nous avons aussi réalisé une version pour les classes de primaire ou de collège sans utiliser la notion de partage de secret et avec des textes plus courts à déchiffrer. Nous souhaitons aussi construire de nouveaux défis qui illustreraient des techniques de la cryptographie moderne.

### Références bibliographiques

- [1] Singh, S. and Coqueret, C. (2001). *Histoire Des Codes Secrets*.
- [2] Shamir, A. (1979). How to share a secret. *Communications of the ACM*, 22(11), 612-613.
- [3] Heen O., and Neumann C. (2017). On the Privacy Impacts of Publicly Leaked Password Databases. *Detection of Intrusions and Malware, and Vulnerability Assessment*, 10327, 347-365.

---

*Remerciements* : Nous tenons à remercier Cédric Lauradoux pour nous avoir inspiré et aidé à la création de cette mission cryptographie.